# Ejercicios Análisis I

Grado en Ciencias Físicas 2019-2020

Hoja 7: Cálculo integral.

**1.** Calcular, aplicando la definición: $\displaystyle\int_2^3 1\,dx\,,\ \int_2^3 x\,dx\ \ \int_2^3 x^2\,dx\,.$

**2.** Probar que la función $f(x)=[x]$ es integrable en $[0,5]$ y calcular $\int_0^5 [x]\,dx$.

**3.** Expresa como integrales los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\,n+k}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\,(n-k)}{n^3}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^3+n\,k^2}$$

**4.** Sea $f$ una función continua en $[a,b]$, no negativa y que cumple $\int_a^b f(x)\,dx=0$. Probar que $f$ es cero en todos los puntos.

**5.** Dar un ejemplo de una función $f$ definida en un intervalo $[a,b]$, no integrable y tal que $f^2$ sea integrable.

**6.** Demostrar que, para cada $c\in\mathbb{R}$ se verifica:

$$\int_a^b f(x+c)\,dx=\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx\,,$$

y, cuando $c\neq 0$,

$$\int_a^b f(c\,x)\,dx=\frac{1}{c}\int_{a\,c}^{b\,c} f(x)\,dx\,.$$

**7.** Sea

$$f(x)=\begin{cases} x\,, & \text{si}\quad x\in[0,1]\,,\\ x+1\,, & \text{si}\quad x\in(1,2]. \end{cases}$$

Definimos $F$ con $F(0)=0$ y

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt\,,\quad \text{si } x\in(0,2\,].$$

Determinar $F$ de forma explícita y probar que es continua en el intervalo $[0,2]$, aunque $f$ no lo sea.

**8.** Sea $f$ una función continua en $[a,b]$. Definimos la *media* o *valor esperado* de $f$ sobre $[a,b]$ como

$$E(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

A. Sean $M$ y $m$ respectivamente el máximo y el mínimo de $f$ sobre $[a,b]$. Demostrar que $m\leq E(f)\leq M$. Si $f$ es constante, ¿cuál es su valor esperado?

B. Usando el teorema de los valores intermedios y el apartado anterior probar el siguiente resultado: *dada* $f$ *, una función continua en* $[a,b]$ *, existe* $\xi \in [a,b]$ *tal que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,.$$

**9.** (*) Estudia el dominio de definición y la derivabilidad de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} \sin t^2 \cdot \log(1+t^2)\,dt\,, \qquad G(x) = \int_{-\mathrm{e}^x}^{\sin^2 x} \cos\log(2\,t^2)\,dt\,.$$

**10.** Encontrar una función $f$ definida y continua en $[0,+\infty)$ y tal que

$$\int_0^{x^2} (1+t)\,f(t)\,dt = 6\,x^4\,.$$

**11.** Sea $f\,:\,[1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, acotada y tal que $f(x) \geq 1$ en todo $x \geq 1$. Calcular razonadamente el siguiente límite, demostrando que se puede utilizar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^{x^2} \frac{f(t)}{t}\,dt\,.$$

**12.** Sea $f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = -1 + \int_0^{x^2} \frac{e^{t^2}}{1+t^2}dt$$

Estudiar razonadamente el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

**13.** Evaluar las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int x\,(6\,x^2-8)^{25}\,dx\,.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}\,.$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx\,.$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}\,.$
5. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx\,.$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,.$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}\,.$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}\,.$
9. $\displaystyle\int \log x\,dx\,.$
10. $\displaystyle\int x\,\log x\,dx\,.$
11. $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{e}^{-2x}\,dx\,.$
12. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}\,\cos 2x\,dx\,.$
13. $\displaystyle\int \sin^4 x\,\cos^6 x\,dx\,.$
14. $\displaystyle\int \arctan x\,dx\,.$

**14.** Calcula $\int \tan x \, dx$ , $\int \tan^2 x \, dx$. Da una fórmula para $\int \tan^n x \, dx$ en términos de $\int \tan^{n-2} x \, dx$. Usa esto para calcular $\int \tan^4 x \, dx$, $\int \tan^5 x \, dx$.

**15.** Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias y, si es el caso, calcular su valor:

A. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \, dx \, .$ B. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^2 - x - 2} \, dx \, .$

C. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{1 + x^4} \, dx \, .$ D. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{4 + x^2} \, dx \, .$

E. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} \, .$ F. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \, \mathrm{e}^{-x} \, dx \, .$

F. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, dx \, .$ G. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\,(-\log x)^{\alpha}} \, , \quad \alpha \in \mathbb{R} \, .$

**16.** (*) Construcción de la función *Gamma de Euler*

A. Comprobar la fórmula de reducción

$$\int x^{\alpha} \, \mathrm{e}^{\beta\, x} \, dx = \frac{1}{\beta} \, x^{\alpha} \, \mathrm{e}^{\beta\, x} - \frac{\alpha}{\beta} \int x^{\alpha-1} \, \mathrm{e}^{\beta\, x} \, dx \, ,$$

para $\alpha > 0$ y $\beta \neq 0$ .

B. La función $\Gamma$ se define para $x > 0$ mediante

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt \, .$$

Comprobar que se verifica

$$\Gamma(x+1) = x \, \Gamma(x) \, .$$

Deducir que $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$.

**Comentarios:** (*) ejercicio difícil.